

INTERFÉRENCES

I) Modèle scalaire de la lumière

1) Ondes lumineuses

Le **modèle scalaire** de la lumière est une construction **indépendante** de la théorie de Maxwell qui permet d'interpréter les résultats expérimentaux d'optique concernant les phénomènes d'interférences et de diffraction à partir de ses propres postulats.

Dans ce modèle, la lumière est décrite comme la propagation de la variation d'un champ **scalaire** $\psi(M, t)$ appelé **amplitude lumineuse** instantanée au point M à l'instant t .

L'aspect « lumière » n'est pas déterminant dans le modèle.

Il peut donc s'appliquer à toute onde spatiale, en particulier les ondes acoustiques, pour lesquelles on évoquera les mêmes phénomènes (interférences, diffraction...)

Dans le cas d'une source étendue dans l'espace, c'est-à-dire constituée de plusieurs points indicés par i , le modèle postule que les **amplitudes instantanées sont additives**:

$$\psi(M, t) = \sum_i \psi_i(M, t).$$

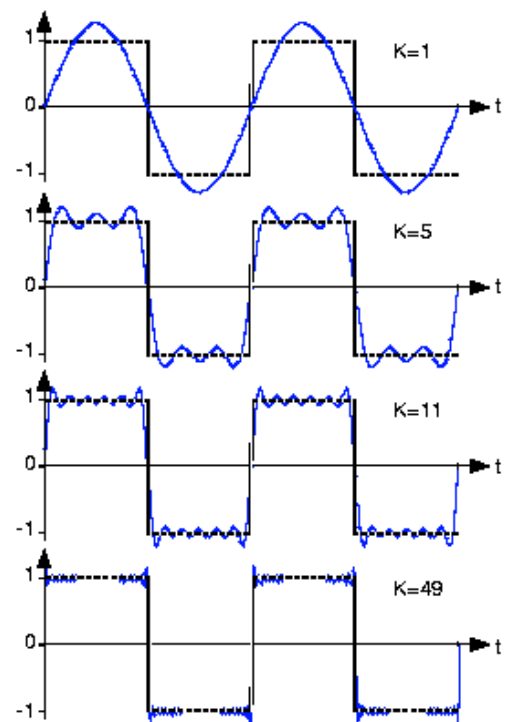
De plus, l'analyse de Fourier permet de décomposer l'amplitude émise par une source ponctuelle S comme la **superposition** d'ondes sinusoïdales de la forme

$$\psi(S, t) = \psi_0 \cos(\omega t + \varphi_s)$$

- ω est la pulsation de la composante (elle est différente pour chaque composante).
- φ_s est la phase à l'origine des temps au point source S .

En notant τ_M le retard dû au temps mis par la lumière pour se propager de la source S au point d'observation M , on peut écrire l'amplitude au point M :

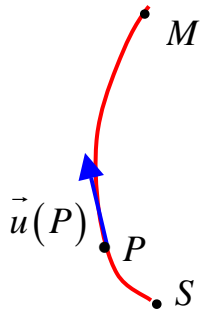
$$\psi(M, t) = \psi_0 \cos(\omega(t - \tau_M) + \varphi_s)$$



Dans le vide, la vitesse de propagation de la lumière est notée c_0 et, pour une onde sinusoïdale de pulsation ω et de longueur d'onde λ_0 , on a

$$\text{la relation } \lambda_0 = c_0 \frac{2\pi}{\omega}.$$

2) Notion de chemin optique



Dans le modèle scalaire de la lumière, on postule qu'entre les points S et M , la lumière se propage suivant une courbe de vecteur unitaire tangent $\vec{u}(P)$ en chaque point, appelée **rayon lumineux** de S à M .

On postule que dans un milieu différent du vide il existe un champ scalaire $n(P)$ caractéristique de ce milieu, appelé **indice de réfraction du milieu**, tel que la vitesse de la lumière dans le milieu est

$$c(P) = \frac{c_0}{n(P)}.$$

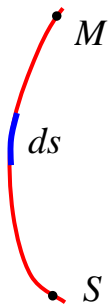
L'indice dépend en général de la pulsation ω de l'onde, c'est-à-dire de sa longueur d'onde dans le vide λ_0 .

Le retard de propagation entre deux points S et M d'un rayon lumineux

$$\text{est } \tau_M = \int_{t=0}^{t=\tau_M} dt.$$

Si l'on note s l'abscisse curviligne le long de ce rayon orienté de S vers M , on peut écrire :

$$\tau_M = \int_{t=0}^{t=\tau_M} dt = \int_s^M \frac{dt}{ds} ds = \int_s^M \frac{1}{c(P)} ds \text{ soit } \tau_M = \frac{1}{c_0} \int_s^M n(P) ds.$$



Déf: On appelle **chemin optique entre S et M** la grandeur

$$(SM) := \int_s^M n(P) ds.$$

$n(P)$ étant sans dimension, (SM) est **homogène à une longueur**.

Interprétation

On constate que l'on a $(SM) = c_0 \tau_M$: le chemin optique entre S et M est donc la longueur qui serait parcourue par la lumière, pendant la même durée τ_M , si elle se propageait dans le vide.

L'expression de l'onde lumineuse est alors

$$\psi(M, t) = \psi_0 \cos(\omega(t - \tau_M) + \varphi_s)$$

$$\psi(M, t) = \psi_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c_0}(SM) + \varphi_s\right)$$

Conclusion : L'amplitude de l'onde lumineuse émise par un point S s'écrit au point

$$M : \psi(M) = \psi_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM) + \varphi_s\right).$$

3) Éclairement

a) définition

Compte tenu des fréquences élevées rencontrées en optique ($f \approx 10^{15}$ Hz), un détecteur d'ondes lumineuses ne peut être sensible qu'à des **moyennes temporelles**.

Les grandeurs étant sinusoïdales après décomposition de Fourier, cela ne peut être la moyenne de $\psi(M, t)$ qui est nulle.

Les détecteurs optiques sont donc de type **quadratiques**, tels que photopiles, photodiodes, photorésistances, photomultiplicateurs, plaque photo, ...

C'est donc $\langle \psi^2(M, t) \rangle$ qui intervient.

Comme la grandeur à laquelle les détecteurs sont sensibles n'est pas précisée, il existe une constante multiplicative inconnue entre elle et $\langle \psi^2(M, t) \rangle$.

Déf: On appelle **éclairement en M** la fonction du point $\mathcal{E}(M) := k \langle \psi^2(M, t) \rangle$ où k est une constante caractéristique du capteur.

L'éclairement est évidemment proportionnel à l'intensité de l'onde au sens électromagnétique. Les deux notions sont souvent confondues, en omettant la constante multiplicative entre les deux.

Pour une onde sinusoïdale, on trouverait

$$\mathcal{E}(M) = k \langle \psi_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) \rangle$$

donc $\mathcal{E}(M) = k\psi_0^2/2$.

b) représentation complexe

L'onde étant sinusoïdale, il est commode d'utiliser sa représentation complexe $\underline{\psi}(M, t)$ telle que $\psi(M, t) = \text{Re}(\underline{\psi}(M, t))$.

On peut écrire $\underline{\psi}(M, t) = \psi_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0))$ et l'**amplitude complexe** de l'onde est $\underline{\psi}(M) = \psi_0 \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_0))$.

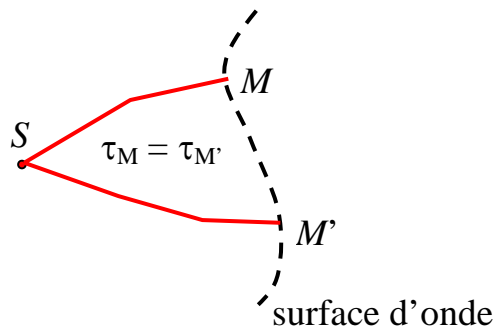
On peut donc écrire $\mathcal{E}(M) = k\psi_0^2/2 = k|\underline{\psi}(M)|^2/2$.

En notant $K = k/2$, on utilise le plus souvent la relation

$$\mathcal{E}(M) = K \underline{\psi}(M) \underline{\psi}^*(M).$$

4) Surface d'ondes

Déf: On appelle **surface d'ondes** relative à la source ponctuelle S un ensemble de point M tels que (SM) est uniforme.



Déf: Un milieu est **homogène** si l'indice de réfraction n est uniforme.

a) ondes sphériques

On constate expérimentalement que dans un milieu homogène, la lumière se propage en ligne droite entre deux points.

$$(SM) = \int_S^M n ds \text{ par définition}$$

$$= n \int_S^P ds \text{ parce que l'indice est uniforme}$$

$$= n |SM| \text{ car le rayon est un segment.}$$

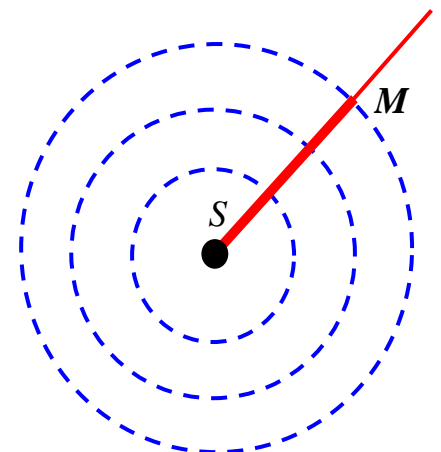
On vérifie que le chemin optique n'est pas la longueur géométrique du rayon lumineux entre S et M .

Si S est une **source ponctuelle**, les surfaces d'ondes ont alors pour équation $n |SM| = Cte$

$$(SM) = n |SM|$$

Si S est une **source ponctuelle**, les surfaces d'ondes ont alors pour équation $n |SM| = Cte$ soit, puisque l'indice est uniforme, $|SM| = R$: les surfaces d'onde sont donc des **sphères** de centre S .

Du fait de la forme des surfaces d'ondes dans le cas présent, les ondes correspondantes sont appelées **ondes sphériques**.

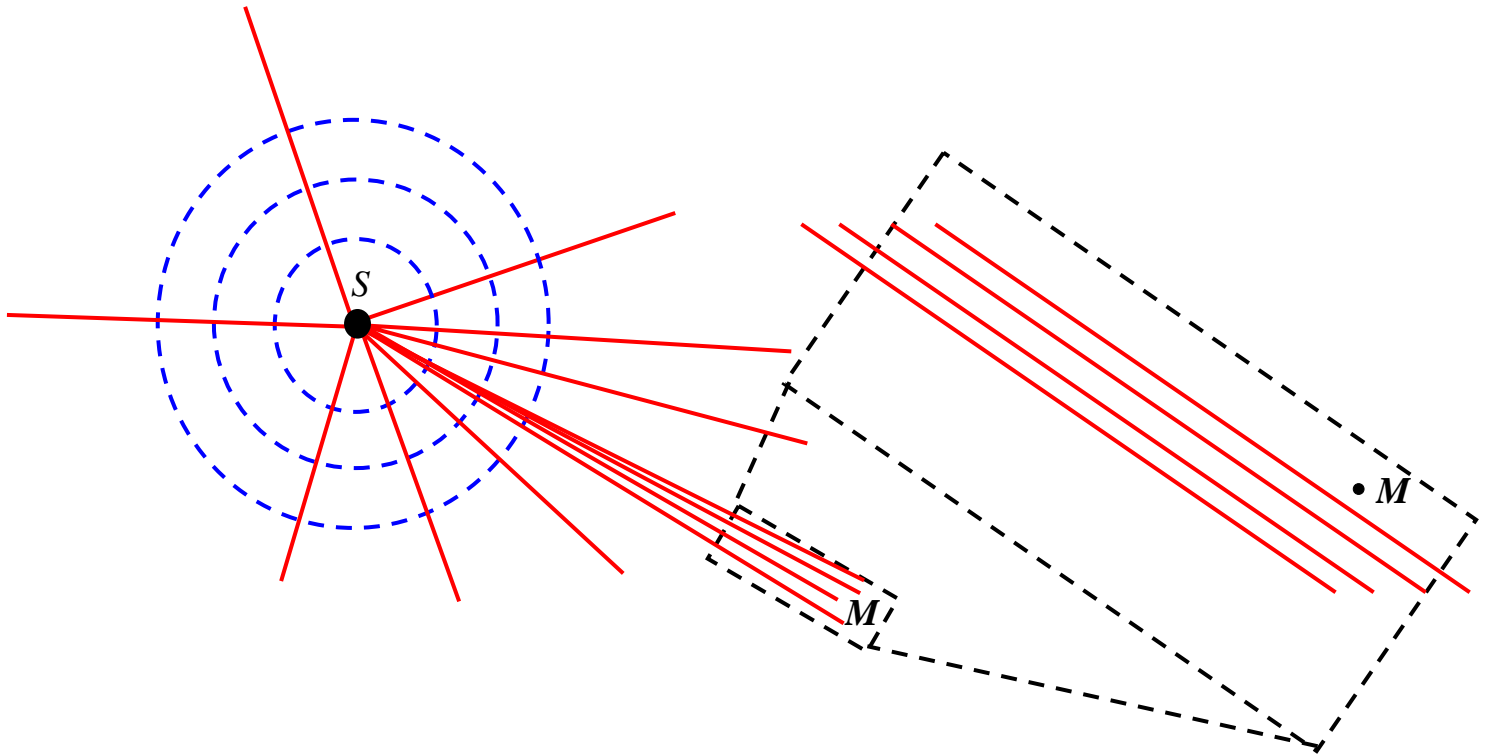


Leur expression peut s'écrire

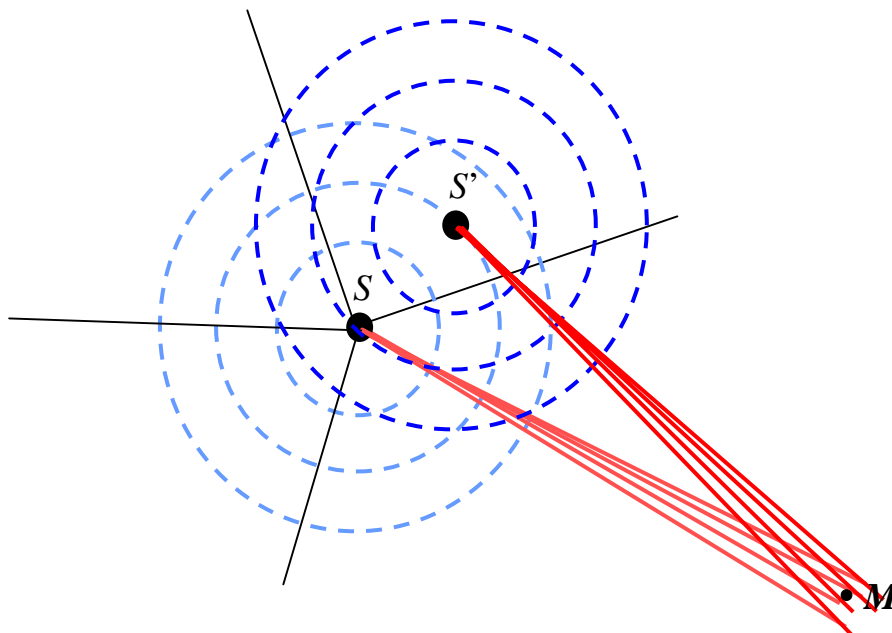
$$\psi(M, t) = \psi_0(M) \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} n |SM| + \varphi_s\right).$$

b) ondes planes

Lorsque la source S est à **l'infini** par rapport à la zone d'observation, les rayons lumineux au voisinage du point d'observation M sont parallèles **entre eux**.

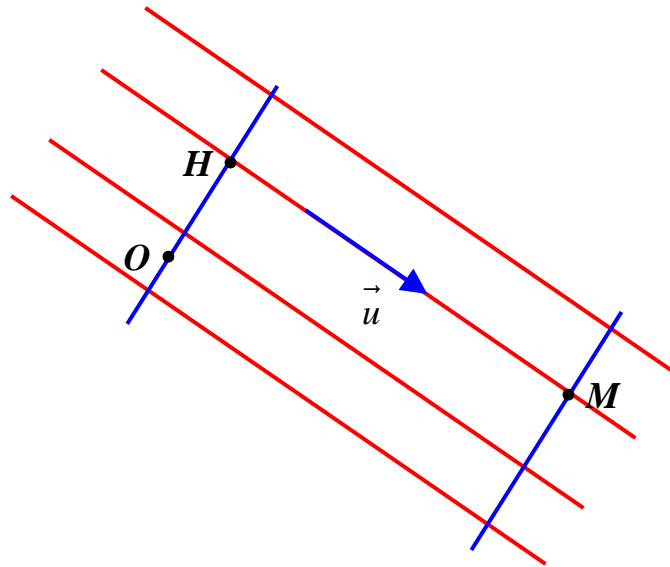


Remarque : Un point source S' différent de S donne au voisinage de M des rayons parallèles **entre eux** mais pas parallèles aux rayons issus de S .



À **retenir** : l'expression « à l'infini » pour désigner la position d'une source ponctuelle n'est **jamais** suffisante pour indiquer la **direction** des rayons lumineux qui en sont issus.

Si l'on prend un point O quelconque, on peut faire le schéma :



D'après la définition des surfaces d'ondes, on a $(SO) = (SH)$.

Le chemin optique entre S et M est alors :

$$\begin{aligned} (SM) &= (SH) + (HM) \\ &= (SH) + n|HM| \text{ puisque le milieu est homogène.} \\ &= (SO) + n|HM|. \end{aligned}$$

On peut donc écrire l'onde

$$\begin{aligned} \psi(M, t) &= \psi_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM) + \varphi_s\right) \\ &= \psi_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}\left[(SO) + n\vec{u} \cdot \vec{r}\right] + \varphi_s\right) \end{aligned}$$

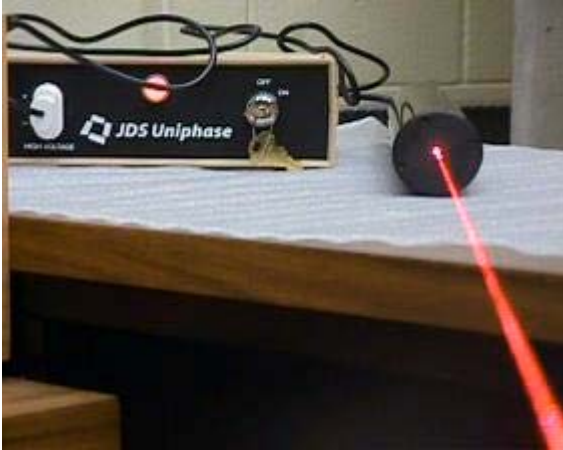
soit $\psi(M, t) = \psi_0 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_o\right)$.

en notant $\varphi_o = \varphi_s - \frac{2\pi}{\lambda_0}(SO)$: **phase à l'origine des temps en O**

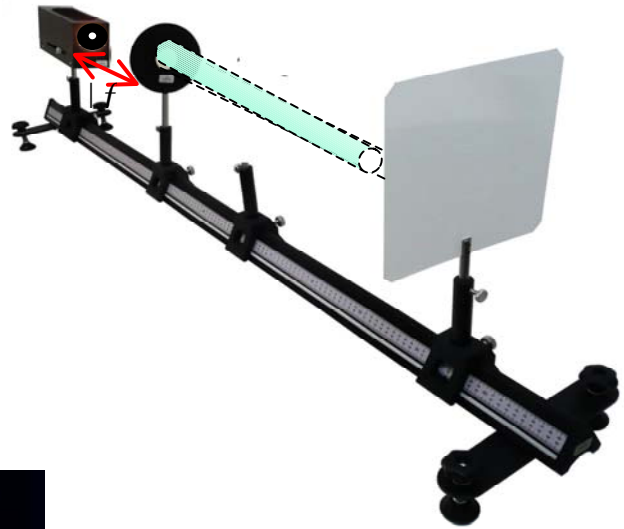
et $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$ **vecteur d'onde** de l'onde plane.

Remarque: En pratique, des ondes optiques planes sont obtenues dans un petit domaine de l'espace :

- en utilisant la lumière émise par un laser.



- en plaçant une source ponctuelle au foyer objet d'une lentille mince convergente ; alors les rayons sont parallèles à l'axe optique dans le domaine de l'approximation de Gauss, c'est-à-dire au voisinage de l'axe



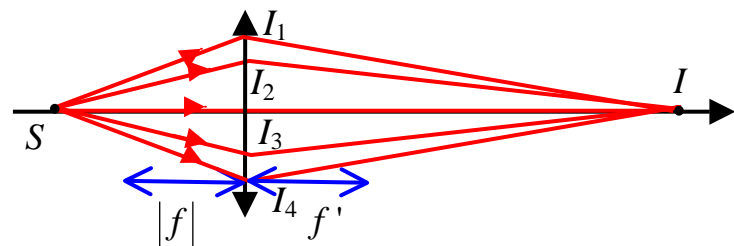
- en plaçant une source ponctuelle au foyer objet d'une lentille mince convergente ; alors les rayons sont parallèles à l'axe optique dans le domaine de l'approximation de Gauss, c'est-à-dire au voisinage de l'axe.
- en observant la lumière venue d'une étoile (sans tenir compte de la traversée de l'atmosphère).

Remarque :

Dans le cas d'un montage avec une lentille décrite par le modèle « lentille mince », on a le schéma suivant :

I est l'image de S et l'on a :

$$(SI_1I) = (SI_2I) = (SI_3I) = (SI_4I).$$



Conclusion : le chemin optique entre deux points images l'un de l'autre par une lentille est le même quel que soit le rayon considéré entre les deux points.

La distance parcourue dans l'air est différente mais elle est compensée par la traversée du verre de la lentille qui n'a pas la même épaisseur pour tous les rayons.

Corollaire : une lentille n'introduit pas de différence entre les chemins optiques des rayons issus d'un même point.

II-Interférences à deux ondes

1) Éclairement crée par deux ondes scalaires

a) calcul en grandeurs réelles

Soient deux ondes lumineuses monochromatiques de pulsations ω_1 et ω_2 , émises par deux sources ponctuelles S_1 et S_2 .

Un point M reçoit les fonctions d'onde :

$$\psi_1(M, t) = \psi_{01} \cos\left(\omega_1 t - 2\pi \frac{(S_1 M)}{\lambda_{01}} + \varphi_{S_1}\right)$$
$$\psi_2(M, t) = \psi_{02} \cos\left(\omega_2 t - 2\pi \frac{(S_2 M)}{\lambda_{02}} + \varphi_{S_2}\right)$$

D'après le principe de superposition, l'amplitude instantanée en M est :

$$\psi(M, t) = \psi_1(M, t) + \psi_2(M, t)$$

$$\psi(M, t) = \psi_1(M, t) + \psi_2(M, t).$$

La valeur moyenne du carré est alors

$$\langle \psi^2(M, t) \rangle = \langle \psi_1^2(M, t) \rangle + \langle \psi_2^2(M, t) \rangle + 2\langle \psi_1(M, t)\psi_2(M, t) \rangle.$$

et l'éclairement en M est $\mathcal{E}(M) := k \langle \psi^2(M, t) \rangle$

$$\mathcal{E}(M) = k \langle \psi_1^2(M, t) \rangle + k \langle \psi_2^2(M, t) \rangle + 2k \langle \psi_1(M, t)\psi_2(M, t) \rangle$$

Alors, $\mathcal{E}_1(M) := k \langle \psi_1^2(M, t) \rangle = k\psi_{10}/2$ est l'éclairement produit par la source S_1 si elle était **seule**.

On constate que cet éclairement est **uniforme** puisque ψ_{10} ne dépend pas de M .

De même, l'éclairement produit par la source S_2 **seule** est $\mathcal{E}_2(M) := k \langle \psi_2^2(M, t) \rangle = k\psi_{20}/2$ et il est également **uniforme**.

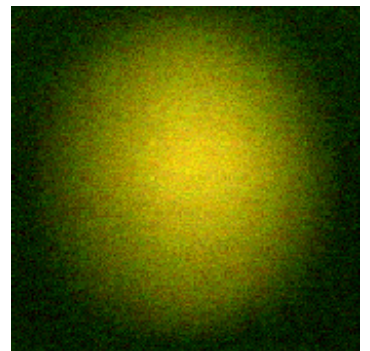
On peut noter $\mathcal{E}_{12}(M) := 2k \langle \psi_1(M, t)\psi_2(M, t) \rangle$.

A priori, ce terme dépend de M .

On peut alors écrire l'éclairement total au point M sous la forme :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{12}(M)$$

On constate que l'on aura deux cas suivant la nullité du terme mixte $\mathcal{E}_{12}(M)$.



- On dit que deux **ondes** sont **incohérentes** lorsque l'éclairement résultant de leur superposition est égal à **la somme des éclairagements** créée par chacune et qu'il **est uniforme** sur le détecteur. (Le terme mixte est nul dans ce cas.)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

- On dit que deux **ondes** sont **cohérentes** lorsque l'éclairement résultant n'est pas égal à la somme des éclairagements créée par chacune et **dépend du point M** sur le détecteur. (Le terme mixte n'est pas nul dans ce cas.)

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{12}(M)$$

b) critère de cohérence de deux ondes

On peut poser $\varphi_1(M) = 2\pi \frac{(S_1 M)}{\lambda_{01}} - \varphi_{S1}$ et $\varphi_2(M) = 2\pi \frac{(S_2 M)}{\lambda_{02}} - \varphi_{S2}$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } \mathcal{E}_{12}(M) &= k \langle 2\psi_{01}\psi_{02} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle \\ &= 2k\psi_{01}\psi_{02} \left\langle \frac{1}{2} \cos((\omega_1 + \omega_2)t - (\varphi_1(M) + \varphi_2(M))) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (-\varphi_1(M) + \varphi_2(M))) \right\rangle \\ &= k\psi_{01}\psi_{02} \left\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - (\varphi_1(M) + \varphi_2(M))) \right\rangle + k\psi_{01}\psi_{02} \left\langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_2(M) - \varphi_1(M))) \right\rangle \end{aligned}$$

Comme $\omega_1 > 0$ et $\omega_2 > 0$, on a $(\omega_1 + \omega_2) \neq 0$ et donc $\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - (\varphi_1(M) + \varphi_2(M))) \rangle$ est toujours nul.

Par contre, $\langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_2(M) - \varphi_1(M))) \rangle$ n'est non nul **que si** $\omega_1 = \omega_2$ car $\varphi_2(M) - \varphi_1(M)$ ne dépend pas du temps puisque φ_{S1} et φ_{S2} n'en dépendent pas.

Conclusion: Deux ondes **cohérentes** sont nécessairement **synchrones** c'est-à-dire qu'elles ont exactement la même pulsation (c'est-à-dire la même longueur d'onde).

On peut écrire alors

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + k\psi_{01}\psi_{02} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)).$$

L'éclairement en M dépend du **déphasage** des deux ondes en ce point.

c) calcul en amplitudes complexes

Puisque des ondes **cohérentes** ont nécessairement la même pulsation ω , la superposition des amplitudes réelles de 2 ondes

$\psi(M, t) = \psi_1(M, t) + \psi_2(M, t)$ peut s'écrire en représentation complexe :

$$\begin{aligned}\underline{\psi}(M, t) &= \psi_{10} \exp(i(\omega t - \varphi_1(M))) + \psi_{20} \exp(i(\omega t - \varphi_2(M))) \\ &= (\psi_{10} \exp(-i\varphi_1(M)) + \psi_{20} \exp(-i\varphi_2(M))) \exp(i\omega t)\end{aligned}$$

Alors, l'éclairement est $\mathcal{E}(M) = \frac{1}{2} k \underline{\psi}(M) \underline{\psi}^*(M)$

$$= (k/2) \psi_{10}^2 + (k/2) \psi_{20}^2 + k \psi_{10} \psi_{20} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)).$$

On retrouve bien le résultat obtenu par le calcul explicite des valeurs moyennes des grandeurs réelles car $\mathcal{E}_1 = (k/2) \psi_{10}^2$ et $\mathcal{E}_2 = (k/2) \psi_{20}^2$

2) Figures d'interférences à deux ondes

a) vocabulaire usuel de l'étude des interférences

Dans le cas de deux ondes cohérentes, on a vu

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + k \psi_{01} \psi_{02} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$$

où $\mathcal{E}_1 = (k/2) \psi_{10}^2$, $\mathcal{E}_2 = (k/2) \psi_{20}^2$

et $\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = 2\pi \frac{(S_2M) - (S_1M)}{\lambda_0} + \varphi_{s2} - \varphi_{s1}$.

Définition : On appelle **différence de marche** en M la différence de chemin optique :

$$\delta(M) := (S_2M) - (S_1M)$$

On montrera que l'on a $\varphi_{s2} = \varphi_{s1}$ en pratique. On a obtenu alors la formule de l'éclairement dû à deux ondes **cohérentes** utilisée dans ce cas :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos\left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0}\right)$$

Il est souvent commode d'introduire une grandeur supplémentaire :

Définition : On appelle **ordre d'interférence** au point M la grandeur sans dimension :

$$p(M) := \frac{\delta(M)}{\lambda_0}.$$

b) franges d'interférences

L'éclairement n'est pas uniforme lorsqu'il dépend du point M d'observation et c'est cette non uniformité qui est caractéristique du phénomène d'interférences.

Déf: On appelle **franges d'interférences** les surfaces d'égal éclairement dans l'espace.

Souvent, on observe l'intersection des surfaces ainsi définies par un écran plan. Il apparaît donc sur cette écran des **lignes** d'égal éclairement. Par extension, ces lignes sont également appelées **franges d'interférences**.

Il est commode de distinguer deux types de franges: les franges brillantes et les franges sombres.

α) franges brillantes

Les franges brillantes sont les surfaces où l'éclairement est maximum.

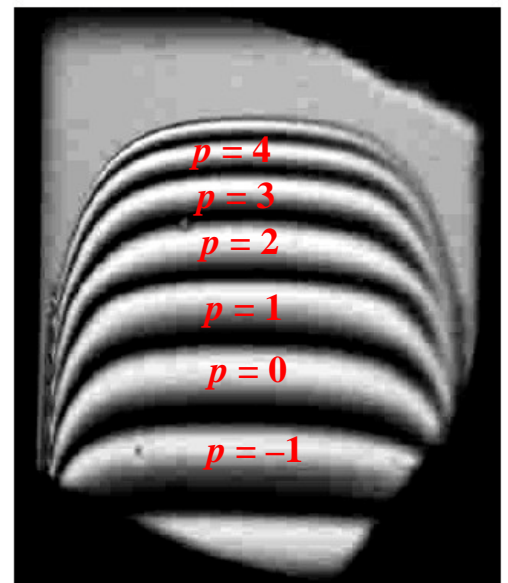
Alors $\cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) = 1$ d'où $\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = 2n\pi$ avec n entier relatif éventuellement nul.

Les deux ondes sont **en phase** en un point M d'une frange **brillante**. On dit que les interférences sont **constructives** en M .

On peut écrire aussi $2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = 2n\pi$ soit

$\delta(M) = n\lambda_0$: la **différence de marche** est un **multiple entier** de la longueur d'onde en un point M d'une **frange brillante**.

On peut écrire enfin, $2\pi p(M) = 2n\pi$ soit $p(M) = n$: l'**ordre d'interférences** est un **entier relatif** en un point M d'une **frange brillante**.



Conclusion: l'ordre d'interférences indique le **rang des franges brillantes** à partir de la frange d'ordre zéro.

β) franges sombres

Les franges sombres sont les surfaces où l'éclairement est minimum.

Alors $\cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) = -1$ d'où $\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = (2n+1)\pi$ avec n entier relatif éventuellement nul.

Les deux ondes sont **en opposition de phase** au point M d'une frange **sombre**.

On dit que les interférences sont **destructives** en M .

On peut écrire aussi $2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = (2n+1)\pi$ soit $\delta(M) = n\lambda_0 + \lambda_0/2$: la **différence de marche** varie de $\lambda_0/2$ entre une frange sombre et une frange brillante.

On peut écrire enfin, $2\pi p(M) = (2n+1)\pi$ soit $p(M) = n + 1/2$: **l'ordre d'interférences** est un **demi-entier** relatif en un point M d'une **frange sombre**.

γ) contraste des franges

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} \cos(2\pi p(M))$$

D'après l'expression de l'éclairement vue auparavant, on a $\mathcal{E}_{\text{MAX}} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}$ pour les franges brillantes et $\mathcal{E}_{\text{MIN}} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - 2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}$ pour les franges sombres.

On en déduit $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = (\mathcal{E}_{\text{MAX}} + \mathcal{E}_{\text{MIN}})/2$ d'une part et $2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} = (\mathcal{E}_{\text{MAX}} - \mathcal{E}_{\text{MIN}})/2$ de l'autre.

On peut donc écrire

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_{\text{MAX}} + \mathcal{E}_{\text{MIN}}}{2} + \frac{\mathcal{E}_{\text{MAX}} - \mathcal{E}_{\text{MIN}}}{2} \cos(2\pi p(M))$$

$$\text{ou encore } \mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_{\text{MAX}} + \mathcal{E}_{\text{MIN}}}{2} \left(1 + \frac{\mathcal{E}_{\text{MAX}} - \mathcal{E}_{\text{MIN}}}{\mathcal{E}_{\text{MAX}} + \mathcal{E}_{\text{MIN}}} \cos(2\pi p(M)) \right)$$

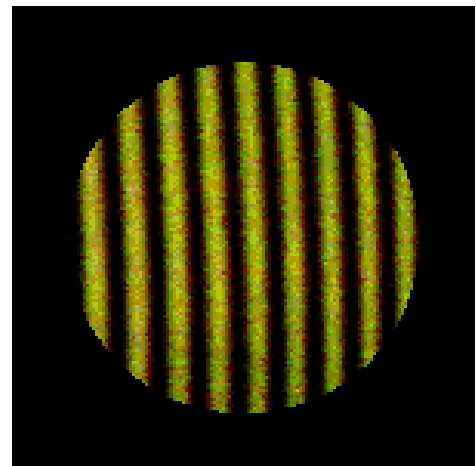
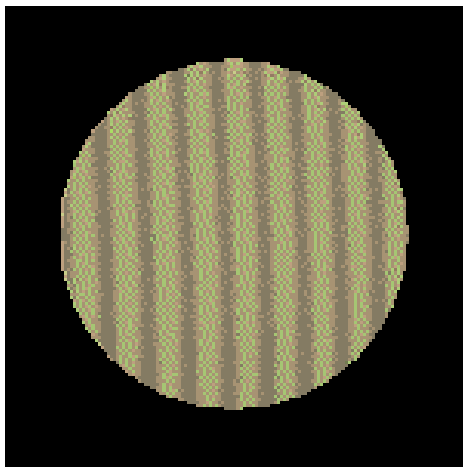
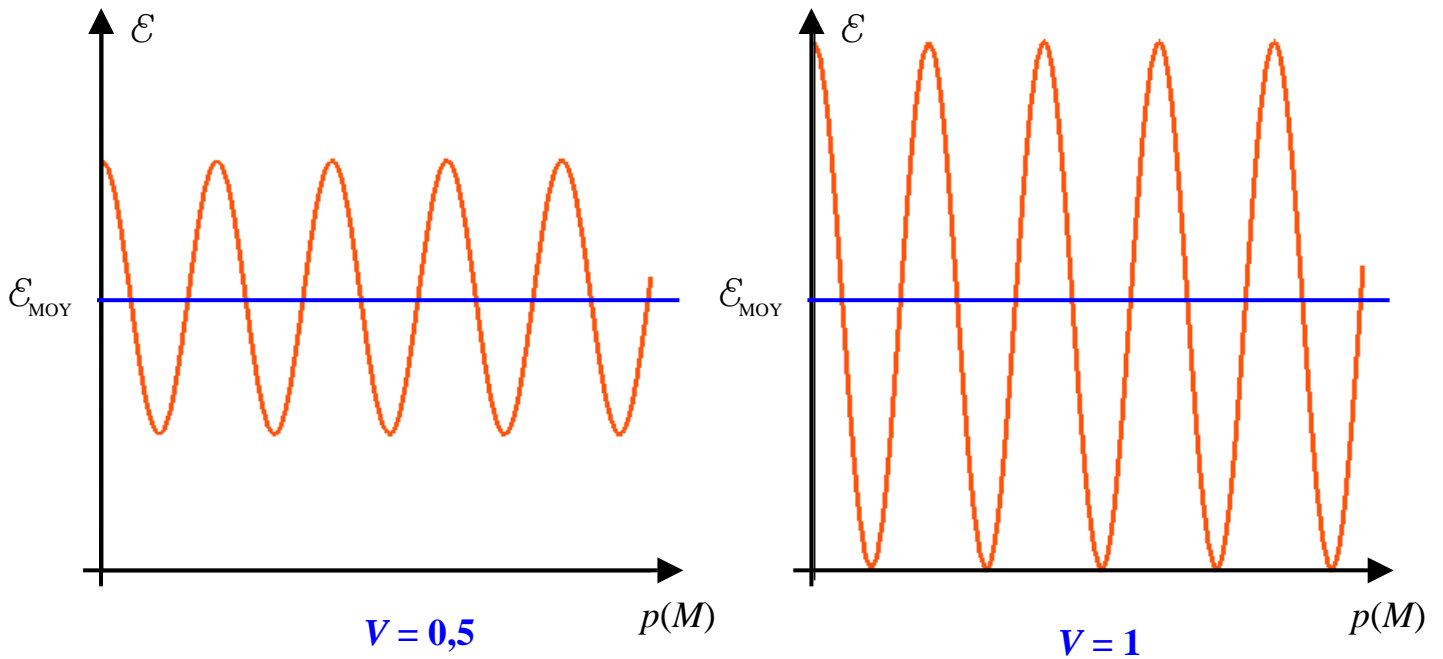
On caractérise la visibilité des franges par le rapport entre la différence moyenne entre éclairement maximum et éclairement minimum d'une part et la valeur moyenne de l'éclairement d'autre part :

Définition: On appelle **facteur de contraste** ou encore **facteur de visibilité** le rapport

$$V = \frac{\mathcal{E}_{\text{MAX}} - \mathcal{E}_{\text{MIN}}}{\mathcal{E}_{\text{MAX}} + \mathcal{E}_{\text{MIN}}}$$

On peut alors écrire : $\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_{\text{MOY}} (1 + V \cos(2\pi p(M)))$

On a les courbes suivantes :



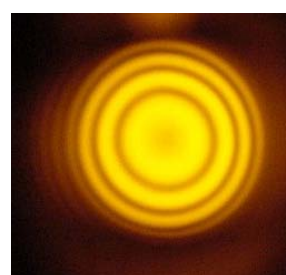
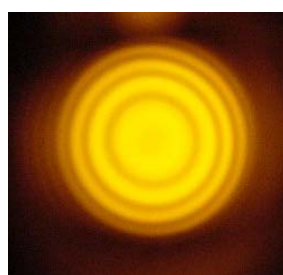
La valeur maximale de V (égale à 1) correspond à

$$\mathcal{E}_{\text{MAX}} - \mathcal{E}_{\text{MIN}} = \mathcal{E}_{\text{MAX}} + \mathcal{E}_{\text{MIN}}$$

d'où $\mathcal{E}_{\text{MIN}} = 0$.

Alors on a nécessairement $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ c'est-à-dire $\psi_{01} = \psi_{02}$.

Conclusion: On a le meilleur contraste et les franges sombres sont noires si les amplitudes des deux ondes qui interfèrent sont égales.



4) Exemples de calcul de la différence de marche

a) cas où les sources S_1 et S_2 sont ponctuelles et à distance finie du point d'observation

Si les deux sources ponctuelles sont à distance finie de M , les ondes sont **sphériques** au niveau de M .

Les amplitudes complexes s'écrivent donc :

$$\underline{\psi}_1(M) = \psi_{01} \exp\left(-i\left[\frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{e}_{r1} \cdot \overrightarrow{S_1M} - \varphi_{s1}\right]\right) \text{ et } \underline{\psi}_2(M) = \psi_{02} \exp\left(-i\left[\frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{e}_{r2} \cdot \overrightarrow{S_2M} - \varphi_{s2}\right]\right)$$

Comme \vec{e}_{r1} est colinéaire à $\overrightarrow{S_1M}$ et \vec{e}_{r2} est colinéaire à $\overrightarrow{S_2M}$, on peut écrire

$$\underline{\psi}_1(M) = \psi_{01} \exp\left(-i\left[\frac{2\pi}{\lambda_0} r_1 - \varphi_{s1}\right]\right) \text{ et } \underline{\psi}_2(M) = \psi_{02} \exp\left(-i\left[\frac{2\pi}{\lambda_0} r_2 - \varphi_{s2}\right]\right)$$

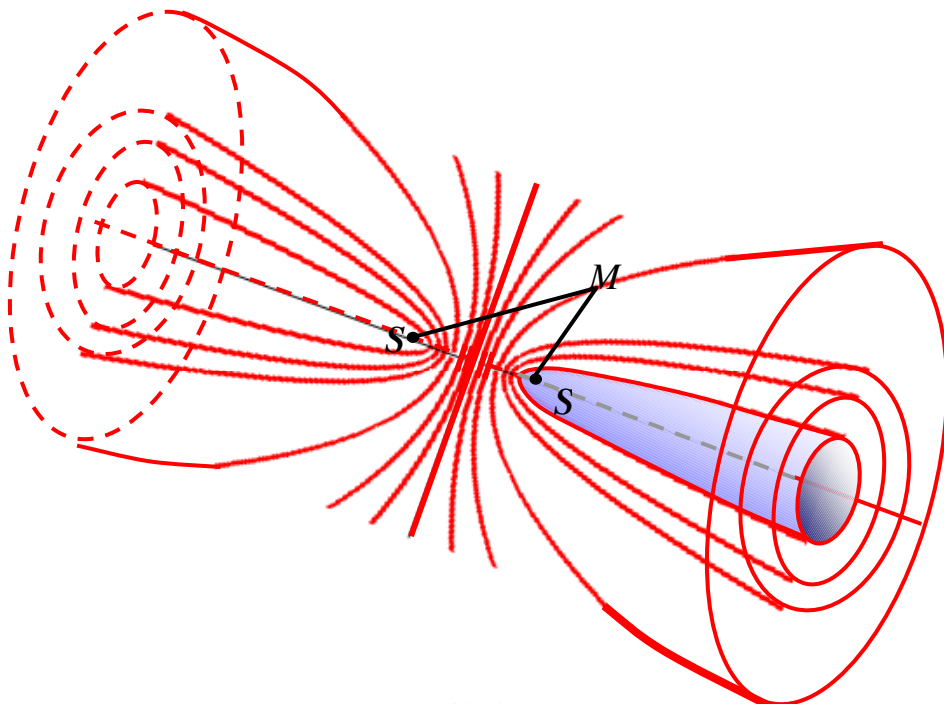
en notant $r_1 = S_1M = \|\overrightarrow{S_1M}\|$ et $r_2 = S_2M = \|\overrightarrow{S_2M}\|$.

Dans l'hypothèse où $V = 1$, c'est-à-dire où $a_1 = a_2$, on peut poser $\psi_{01} = \psi_{02} = \psi_0$ et on a alors

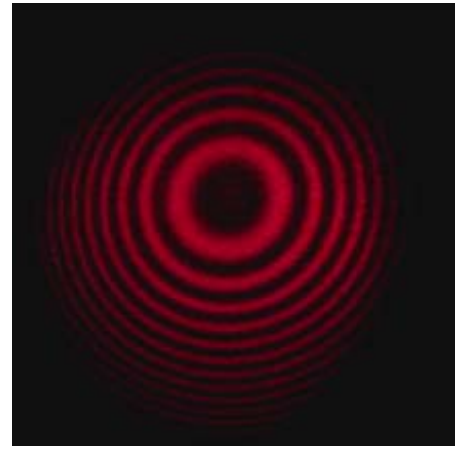
$$\underline{\psi}_1(M) = \psi_0 \exp\left(-i\left[\frac{2\pi}{\lambda_0} r_1 - \varphi_{s1}\right]\right) \text{ et } \underline{\psi}_2(M) = \psi_0 \exp\left(-i\left[\frac{2\pi}{\lambda_0} r_2 - \varphi_{s2}\right]\right).$$

L'éclairement s'écrit en M : $\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda_0}(r_2 - r_1) + (\varphi_{s2} - \varphi_{s1})\right]\right)$.

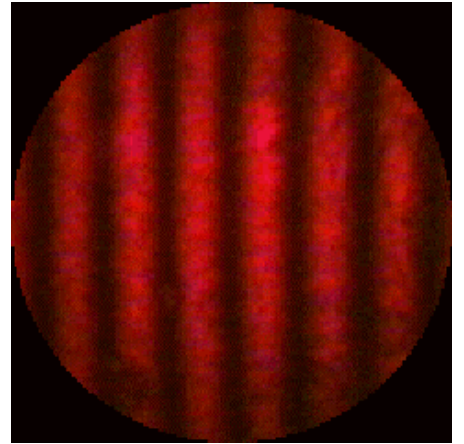
Dans ce cas, les lieux d'égal éclairement sont donc des **hyperboloïdes** d'équation $r_2 - r_1 = C$ et de foyers S_1 et S_2 .



L'intersection des différentes nappes d'hyperboloïdes par le plan d'un écran **perpendiculaire** à S_1S_2 donne des franges brillantes et noires qui sont des cercles centrés sur la droite S_1S_2 .



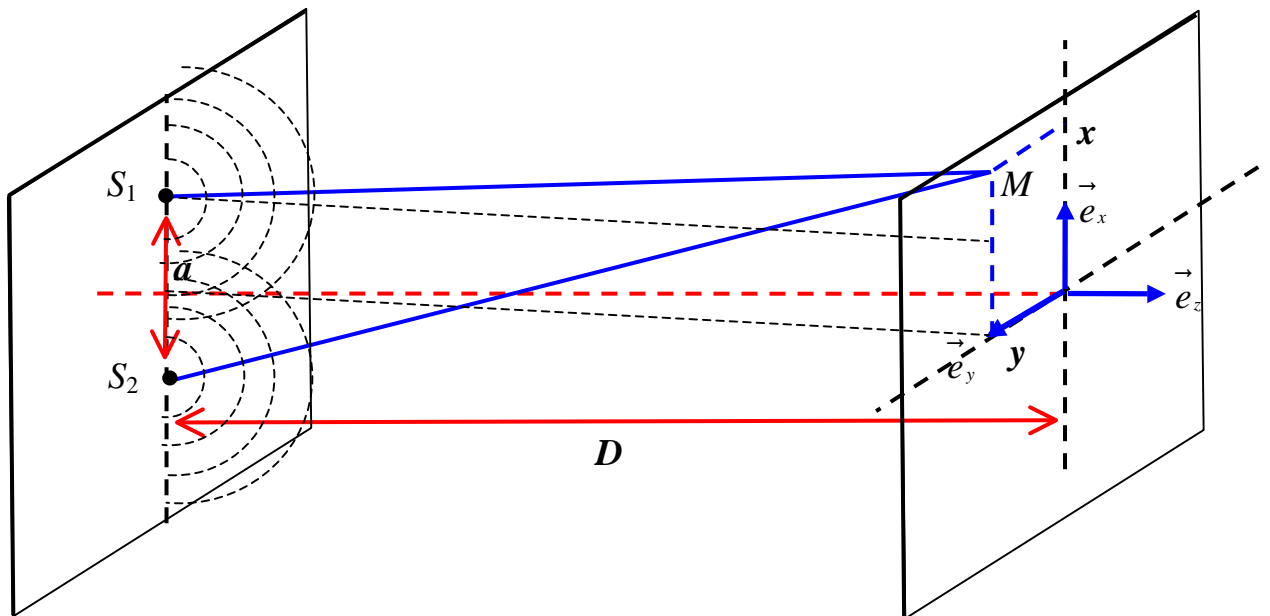
L'intersection des différentes nappes d'hyperboloïdes par le plan d'un écran **pa-
rallèle** à S_1S_2 donne des franges brillantes et noires qui sont des branches d'hyperboles.



Comme on est loin des sources et que le champ d'interférences sur l'écran est petit, on peut assimiler ces courbes à leurs tangentes: dans ce cas, les franges apparaissent **rectilignes**.

Exemple des franges rectilignes :

On observe sur un écran placé parallèlement à la droite des sources et situé à la distance D .

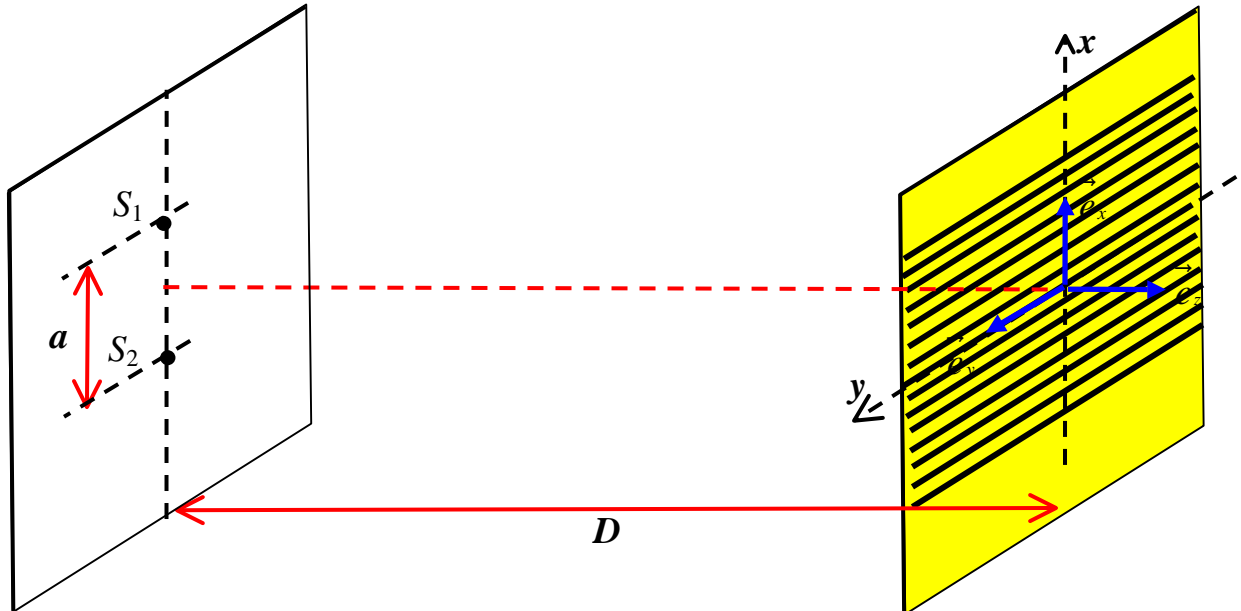


Alors $\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} + (\varphi_{S_2} - \varphi_{S_1}) \right) \right)$ dans le cas où $V = 1$.

L'**ordre d'interférence** vaut donc $p(M) = \frac{ax}{\lambda D}$.

On constate que l'ordre d'interférence ne change pas lorsque le point M se déplace parallèlement à Oy .

Les franges d'interférences sur l'écran sont des droites parallèles à Oy .
(Dans l'approximation utilisée au deuxième ordre près, les morceaux d'hyperboles sont vus comme des droites.)



L'éclairement varie périodiquement avec x .

Déf: Dans un figure d'interférences périodique, on appelle **interfrange** la période spatiale de l'éclairement sur un écran.

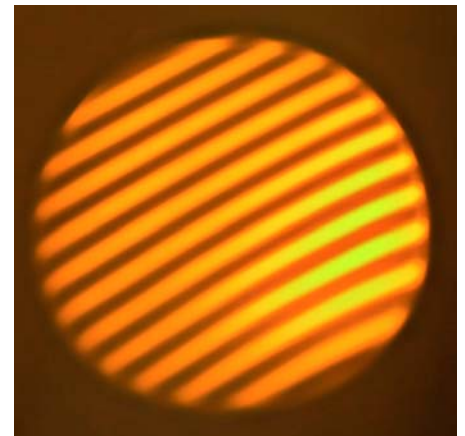
L'interfrange i est évidemment la distance entre deux franges brillantes consécutives (ou deux franges sombres consécutives). Dans le cas présent, l'expression de l'interfrange est :

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

L'interfrange augmente si a diminue : on a intérêt à fabriquer des sources S_1 et S_2 les plus proches possibles pour obtenir des franges les plus écartées possibles. $i = \frac{\lambda D}{a}$

A.N. $a = 1 \text{ mm}$, $D = 1 \text{ m}$ et $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$. On trouve $i = 0,5 \text{ mm}$ dans l'air.

La frange brillante de rang m par rapport à la frange d'ordre 0 a pour abscisse $x_m = m \lambda \frac{D}{a}$ avec m entier relatif.

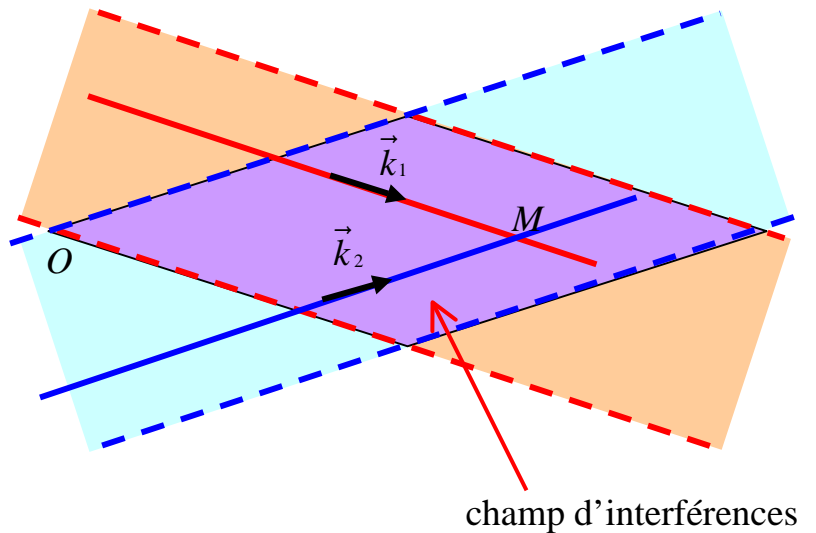


b) cas où les sources sont ponctuelles et à l'infini

On sait qu'au voisinage du point d'observation M , l'onde issue d'une source ponctuelle à l'infini est **plane**.

La zone où deux ondes planes se superposent peut se représenter ainsi :

On choisit un point O comme origine des positions et l'on note $\varphi_1(O)$ [resp $\varphi_2(O)$] son retard de phase par l'onde (1) [resp (2)] par rapport à la source S_1 [resp S_2].



Les amplitudes complexes en M peuvent alors s'écrire :

$$\underline{\psi}_1(M) = \psi_{01} \exp\left(-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \varphi_1(O))\right) \text{ et } \underline{\psi}_2(M) = \psi_{02} \exp\left(-i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \varphi_2(O))\right).$$

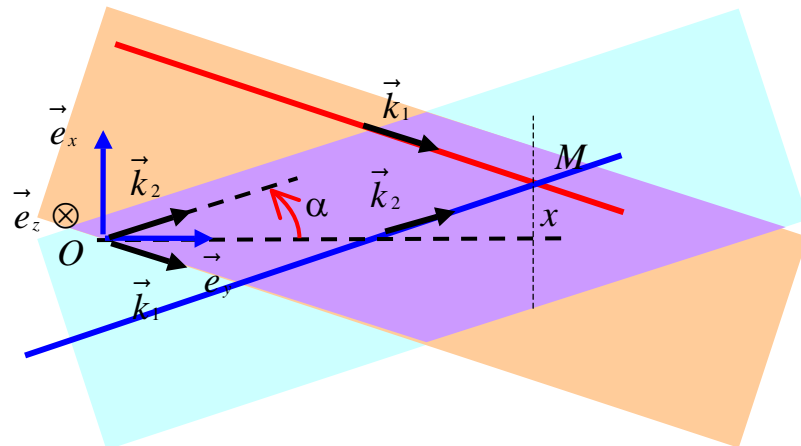
On se limite au cas où $V = 1$ c'est-à-dire $\psi_{01} = \psi_{02} = \psi_0$.

Alors $\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))\right)$ avec

$$\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} - (\varphi_2(O) - \varphi_1(O)).$$

Dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ telle que \vec{e}_y est porté par la bissectrice de \vec{k}_1 et \vec{k}_2 , on peut écrire :

$$\vec{k}_1 = k \left[\cos(\alpha) \vec{e}_y - \sin(\alpha) \vec{e}_x \right]$$



et $\vec{k}_2 = k \left[\cos(\alpha) \vec{e}_y + \sin(\alpha) \vec{e}_x \right]$ avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ où λ est la longueur d'onde dans le milieu.

On en déduit $\vec{k}_2 - \vec{k}_1 = 2k \sin(\alpha) \vec{e}_x$ puis $(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} = 2k \sin(\alpha) x$.

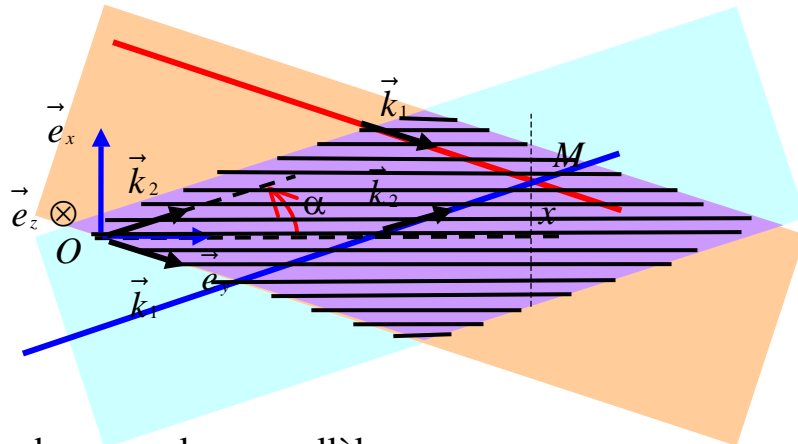
$$\text{donc } \mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi \sin(\alpha)}{\lambda} x + \Delta\varphi(O) \right) \right).$$

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi \sin(\alpha)}{\lambda} x + \Delta\varphi(O) \right) \right)$$

On constate que l'éclairement est indépendant de y et z donc il ne varie pas dans les plans parallèles à yOz .

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi \sin(\alpha)}{\lambda} x + \Delta\varphi(O) \right) \right)$$

On constate que l'éclairement est indépendant de y et z donc il ne varie pas dans les plans parallèles à yOz .

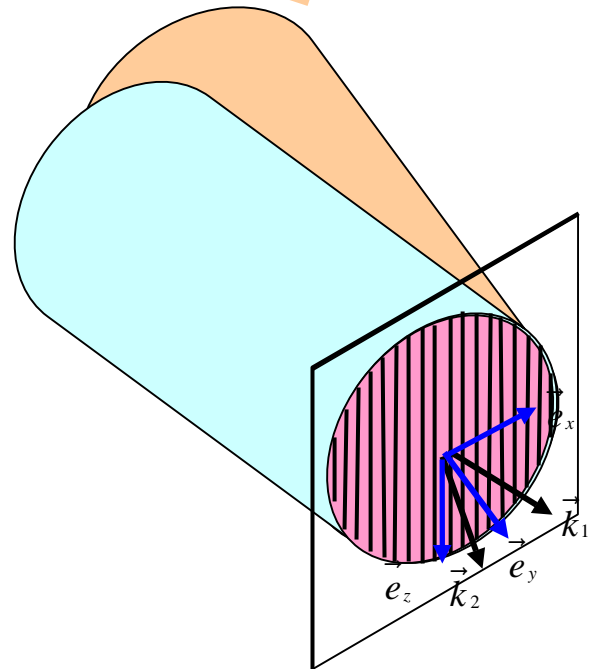


Par contre dans les plans parallèles à xOz , l'éclairement varie avec x .

Sur un écran placé dans un tel plan, la période spatiale est i telle que $\frac{4\pi \sin(\alpha)}{\lambda} x = \frac{2\pi}{i} x$ soit

$$i = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha)}$$

Pour augmenter i , il faut que le système interférentiel réalise α très voisin de 0. Sur un écran placé parallèlement à Oxz , les franges d'interférences sont **des droites**:



Remarque :

L'intersection de l'écran avec la zone de l'espace où se produisent les interférences s'appelle **champ d'interférences** sur l'écran.

II) Réalisation pratique d'interférences en optique

1) Notion de trains d'ondes

On constate expérimentalement que l'éclairement produit par deux sources optiques ponctuelles physiquement distinctes, monochromati-

ques de même pulsation, est uniforme: on n'observe pas de phénomènes d'interférences.

On sait que la condition nécessaire de cohérence est que les ondes soient synchrones. Or, c'est impossible à obtenir avec deux sources ponctuelles physiquement distincts.

Conclusion: Deux ondes synchrones émises par des points sources physiquement distincts sont **incohérentes**.

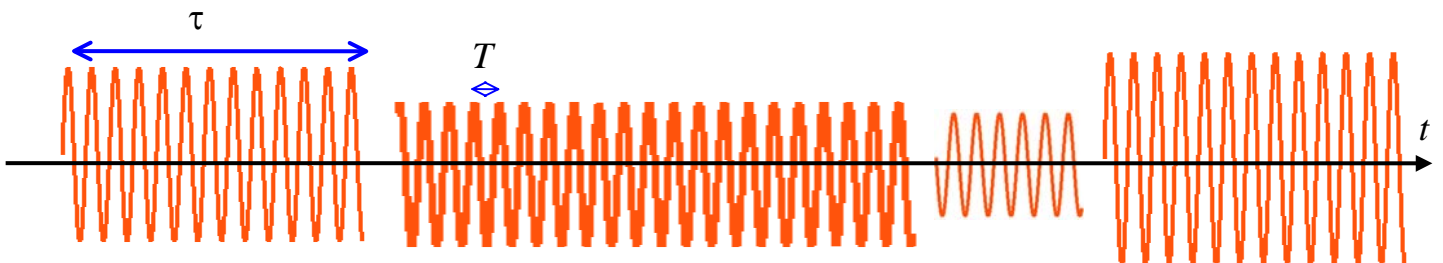
Il faut envisager de fabriquer deux ondes à partir du même point source.

Cependant, on constate expérimentalement que l'éclairement produit par deux ondes issues d'une même source ponctuelle est en général uniforme: on n'observe pas de phénomènes d'interférences.

On en déduit que l'aspect « propagation » ne suffit pas pour décrire les résultats expérimentaux, il faut aussi tenir compte du mécanisme d'émission de l'onde, en particulier dans le cas des sources lumineuses.

Une onde émise par une source réelle a nécessairement un début et une fin : une source réelle n'émet pas une onde sinusoïdale de manière continue.

On modélise l'onde lumineuse par une succession de **trains d'ondes** de durées, d'amplitudes, de phases à l'origine φ_s et de directions de polarisation aléatoires.



représentation temporelle de l'onde émise par une source ponctuelle

La durée moyenne d'un train d'ondes ou la durée moyenne entre deux trains d'ondes sont de l'ordre de 10^{-11} s pour une lampe spectrale et 10^{-7} s pour un laser.

Pour la lumière dans le visible, la période temporelle des oscillations est $T \approx 10^{-14}$ s donc on a toujours $T \ll \tau$.

L'onde émise en S peut s'écrire dans ce modèle

$$\psi_s(t) = \psi_0(t) \cos(\omega t + \varphi_s(t)).$$

La dépendance temporelle de φ_s rend nulle en général le terme mixte en $\langle \psi_1 \psi_2 \rangle$ de l'éclairement.

Il faut être plus précautionneux.

2) Longueur de cohérence

Si en M se superposent des trains d'ondes i et j **différents** issus de la même source ponctuelle S , la valeur de $\varphi_{S,j} - \varphi_{S,i}$ varie de manière aléatoire sur la durée de mesure du détecteur et alors

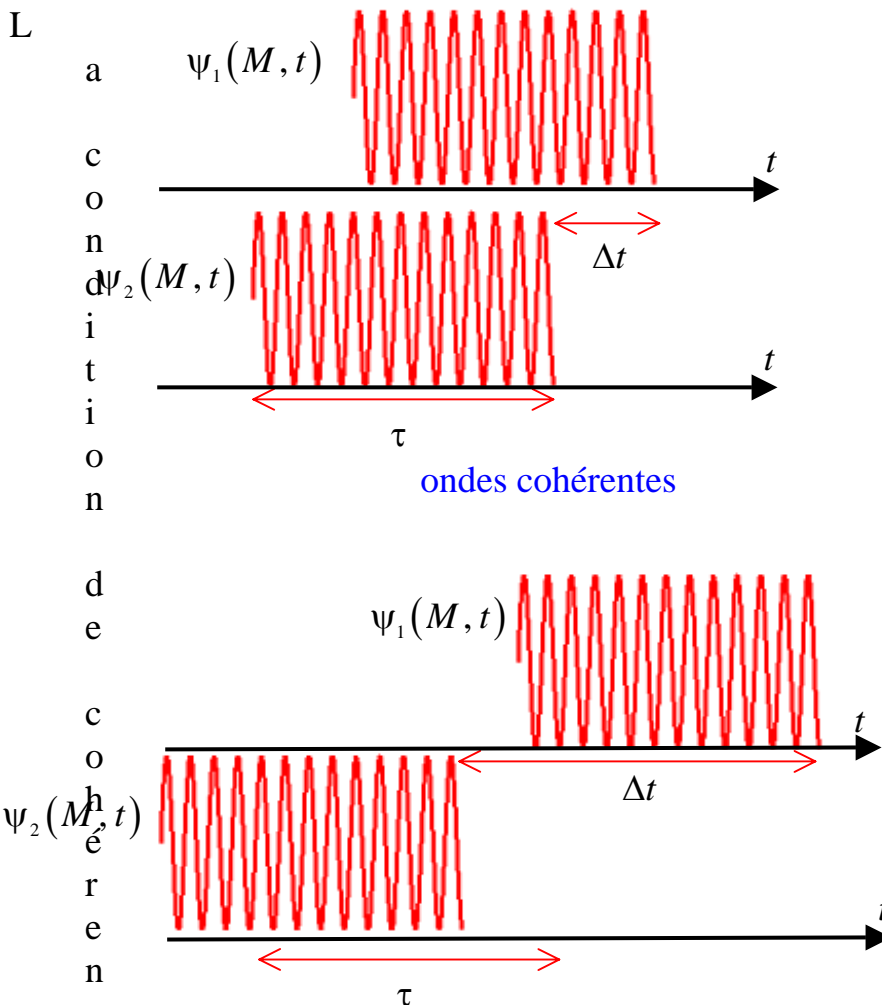
$$\left\langle \cos \left(2\pi \frac{(S_2M) - (S_1M)}{\lambda_0} + \varphi_{S_j}(t) - \varphi_{S_i}(t) \right) \right\rangle = 0.$$

Dans ce cas, le terme d'interférences disparaît et les deux ondes sont incohérentes, bien que parfaitement synchrones.

Par contre, si les deux ondes qui interfèrent sont issues du **même train d'onde** initial, la différence de phase à l'origine est nulle puisque alors $\varphi_{S_2} = \varphi_{S_1}$. Les deux ondes sont alors **cohérentes**.

En notant $\delta(M)$ la différence de chemin optique entre les deux ondes arrivant en M , on sait que $\Delta t = \delta(M)/c_0$ représente l'écart entre les deux durées de parcours des deux ondes.

Si τ est la durée d'un train d'onde, la condition de cohérence est donc $\Delta t < \tau$ ou $\delta(M) < c_0\tau$.



Déf: On appelle **longueur de cohérence** d'une source la grandeur homogène à une longueur $\ell^* = c_0 \tau$ où τ est la durée moyenne des trains d'ondes.

Pour une lampe spectrale usuelle, ℓ^* est de l'ordre de quelques millimètres. Elle est beaucoup plus grande pour les lasers.

Conclusion: Deux ondes issues d'une même source ponctuelle monochromatique ne seront cohérentes que si la **différence de chemin optique** $\delta(M)$ en un point M est inférieure à la **longueur de cohérence** ℓ^* de la source.

3) Dispositifs optiques interférométriques

a) principe

Pour obtenir des interférences en optique, il faut que les ondes qui se superposent soient issues d'un **seul point source monochromatique**.

De plus, il faut que les deux ondes suivent des trajets différents entre S et M pour que $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M) \neq 0$.

On utilise donc des **dispositifs interférentiels** qui opèrent une **division de l'onde** émise par un point source.

b) source ponctuelle ou étendue

Si la source S est **ponctuelle**, ses images géométriques S_1 et S_2 par un dispositif interférométrique le sont aussi.

On sait que dans ce cas les franges sont des nappes d'hyperboloïdes de foyers S_1 et S_2 . Si l'on observe sur un écran perpendiculaire à la direction S_1S_2 , on obtient des **cercles** d'axes S_1S_2 , si l'on observe sur un écran parallèle à la direction S_1S_2 , on obtient des **franges rectilignes**,

L'écran d'observation peut être déplacé sans que les franges disparaissent : le champ d'interférence est une zone étendue de l'espace.

Conclusion: les franges obtenues par un interféromètre éclairé par une **source ponctuelle** sont **non localisées**.

Mais une source ponctuelle n'est évidemment pas très lumineuse. L'éclairement des franges brillantes ne sera pas très intense.

Pour améliorer la luminosité des franges, il faut utiliser une source **étendue** spatialement.

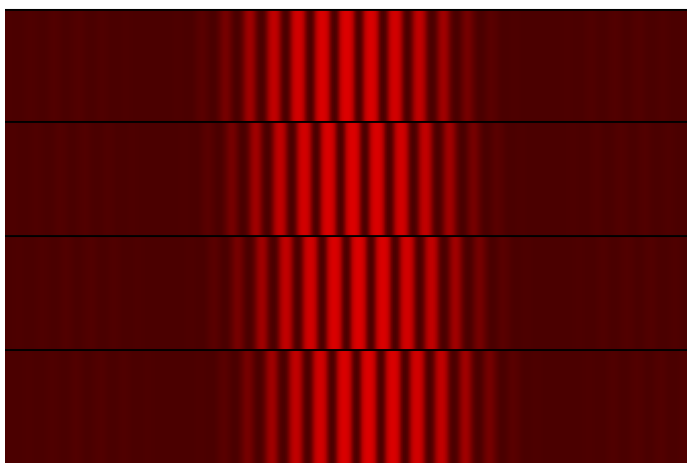
Mais les franges obtenues par un interféromètre éclairé par une **source étendue** sont **localisées**.

franges dues au point P_1

franges dues au point P_2

franges dues au point P_3

franges dues au point P_4



franges crées par différents points sources

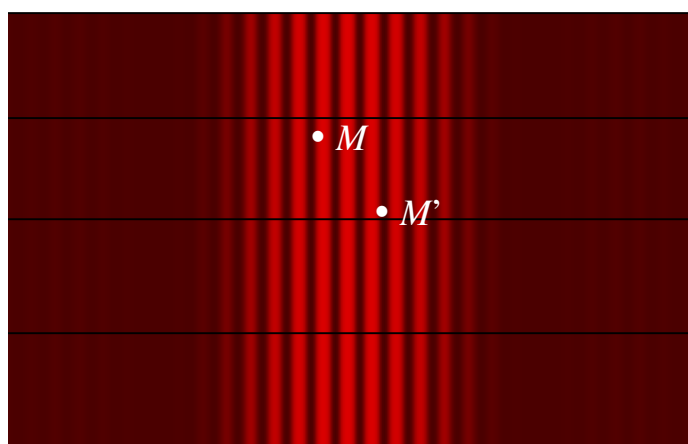
Dans la zone de localisation des franges, toutes les franges brillantes se superposent en certains points et elles sont donc plus lumineuses qu'avec une seule source ponctuelle.

franges dues au point P_1 en M

franges dues au point P_2 en M

franges dues au point P_3 en M

franges dues au point P_4 en M



franges crées par différents points sources dans la zone de localisation

En d'autres points, ce sont toutes les franges sombres qui se superposent.

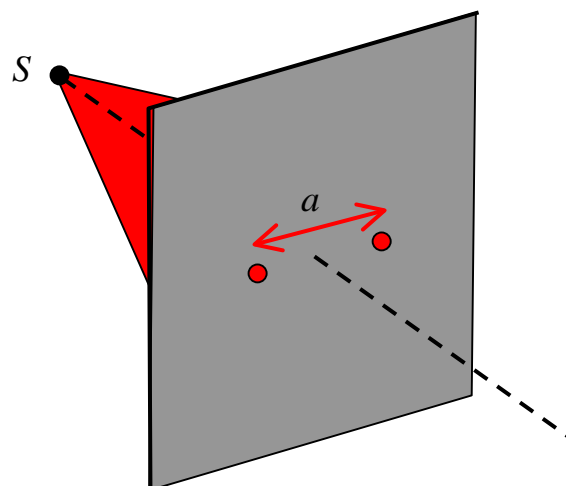
Conclusion: Une meilleure luminosité des franges est incompatible avec leur non localisation.

c) exemples

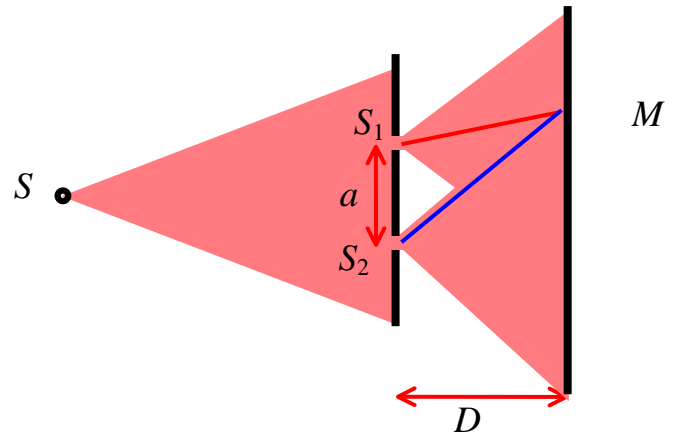
α) trous ou fentes d'Young

Le système des **trous d'Young** est constitué par un écran percé de deux petits trous identiques, séparés de a , que l'on place devant une source ponctuelle.

Chaque trou diffracte la lumière dans toutes les directions et on étudie

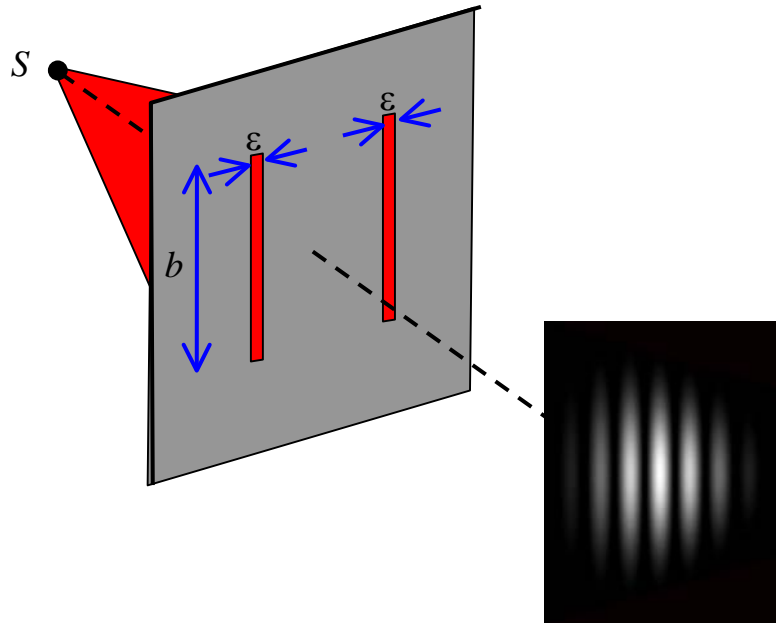


l'éclairement en un point M de l'écran d'observation qui reçoit de la lumière provenant de **chaque trou**.



Les trous S_1 et S_2 sont considérés comme ponctuels ; ils reçoivent la lumière provenant de la même source S .

On peut donc les assimiler à des sources ponctuelles **cohérentes**.



L'éclairement sur l'écran ne sera pas uniforme et présentera une figure d'interférences.

L'écran d'observation étant parallèle à la direction des sources secondaires S_1 et S_2 , on sait que

les franges sont rectilignes et séparées par une interfrange $i = \frac{\lambda D}{a}$.

Pour augmenter la luminosité des franges, il est possible de remplacer les **trous** par des **fentes** étroites, de même largeur ε , de même longueur b et placées parallèlement aux franges observées précédemment.

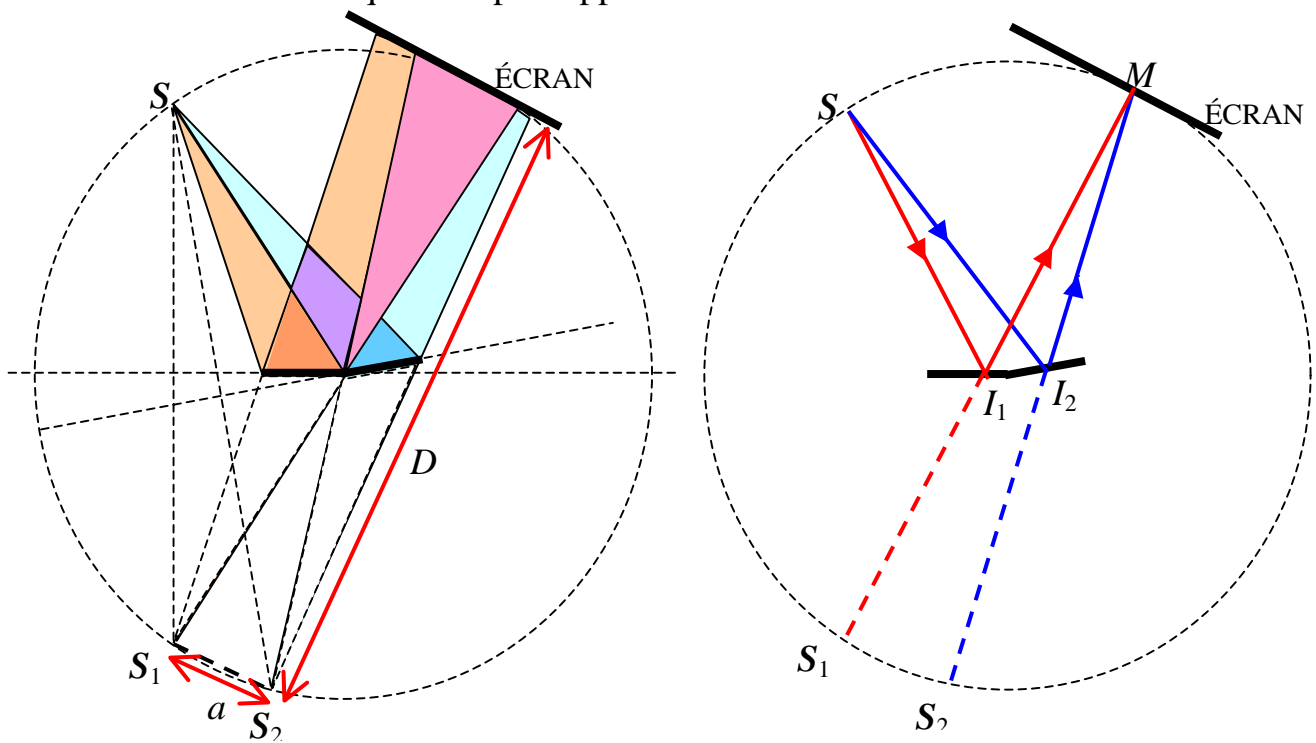


expérience de Young (1801) en lumière blanche

β) miroirs de Fresnel

Deux miroirs plans font un angle α de quelques minutes. Ils sont éclairés par une source ponctuelle S .

Une partie des rayons lumineux émis par S se réfléchit sur le miroir M_1 (resp M_2) en semblant provenir d'un point image S_1 (resp M_2) symétrique de S par rapport au miroir.



Les sources S_1 et S_2 images de S sont symétriques de S par rapport aux miroirs.

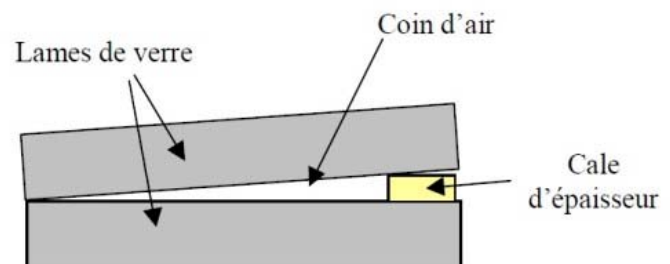
Conclusion: Tout se passe comme si les ondes qui interfèrent en M étaient émises par les points sources S_1 et S_2 images de S par le dispositif. Elles sont synchrones et cohérentes.

De plus, les sources S_1 et S_2 sont perpendiculaires à la direction de propagation moyenne et l'écran d'observation est parallèle à la droite des sources.

Les franges sont rectilignes avec une interfrange $i = \frac{\lambda D}{a}$.

γ) coin d'air

Un coin d'air est formé de deux plans réfléchissants formant un angle α très petit.



On trouve

$$\delta(M') = c\Delta t = 2e(M).$$

Les franges d'interférences sont donc des droites parallèles à l'arête du coin telles que $x = \text{constante}$.

Les franges sont rectilignes et l'on peut définir l'interfrange i telle que

$$2\pi \frac{2\alpha x}{\lambda_0} = 2\pi \frac{x}{i}.$$

On trouve $i = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$.

Conclusion: Dans les franges du coin d'air, l'interfrange **augmente** lorsque l'angle entre les deux miroirs **diminue**.

Remarque : On peut obtenir ce résultat à partir de la formule générale de l'interfrange créée par deux sources ponctuelles placées parallèlement au plan d'observation soit $i = \frac{\lambda D}{a}$.

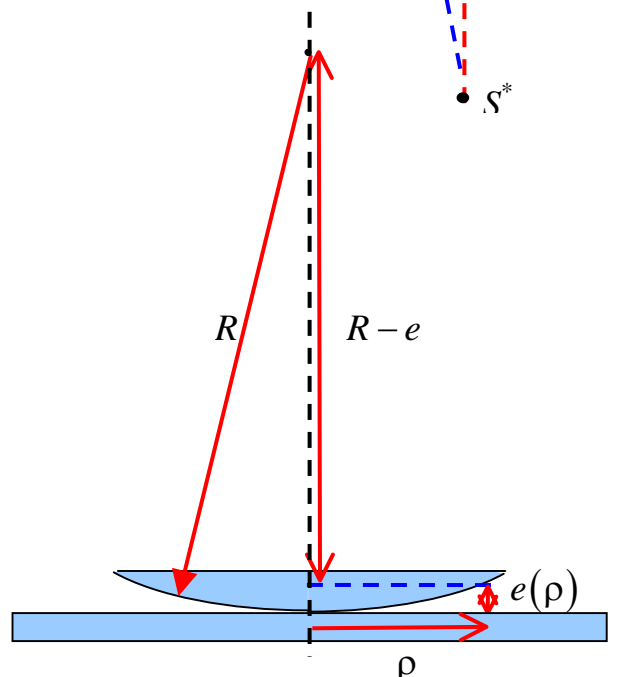
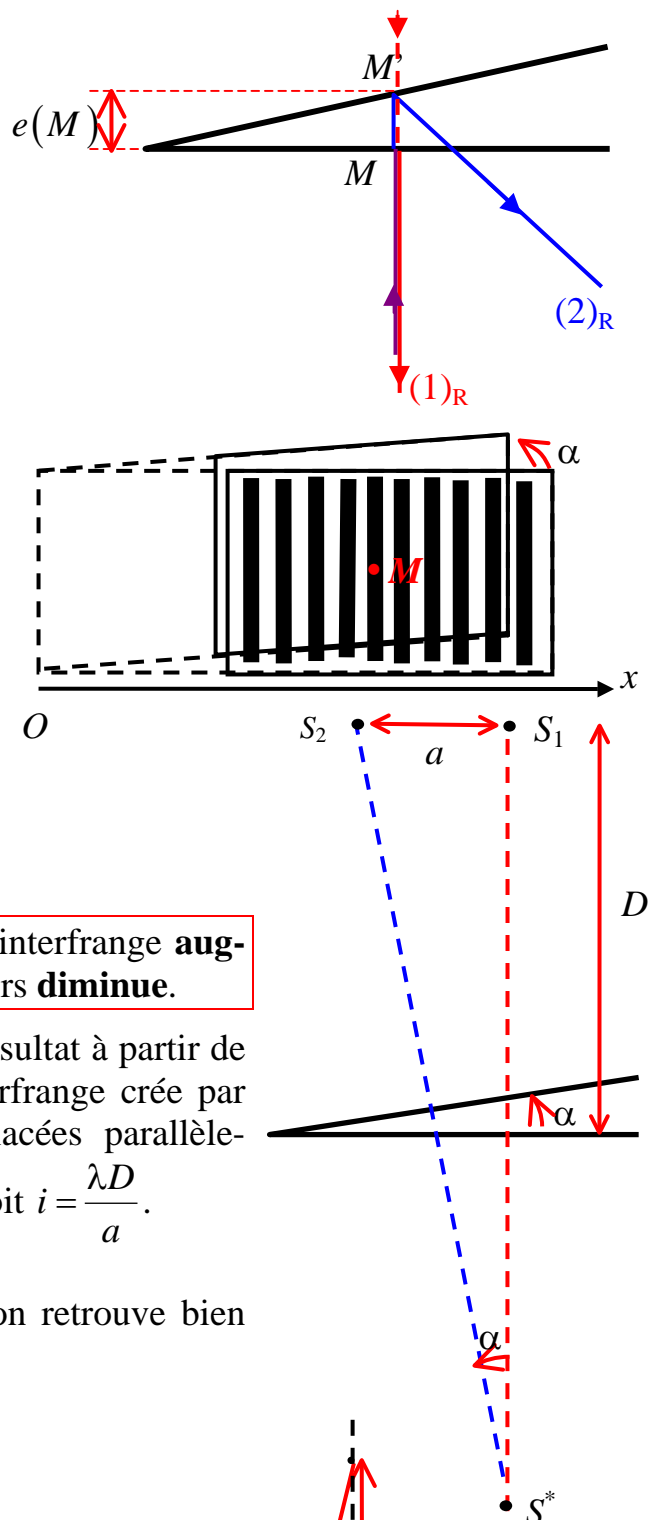
On a ici $\tan(\alpha) \approx \alpha = \frac{a}{2D}$ donc on retrouve bien

$$i = \frac{\lambda_0}{2\alpha}.$$

δ) anneaux de Newton

Une lentille sphérique plan-convexe est placée à l'équilibre sur une surface plane réfléchissante.

La lame d'air qui délimite les deux surfaces est donc d'épaisseur variable.



Compte tenu de sa symétrie de révolution, l'interféromètre crée des anneaux.

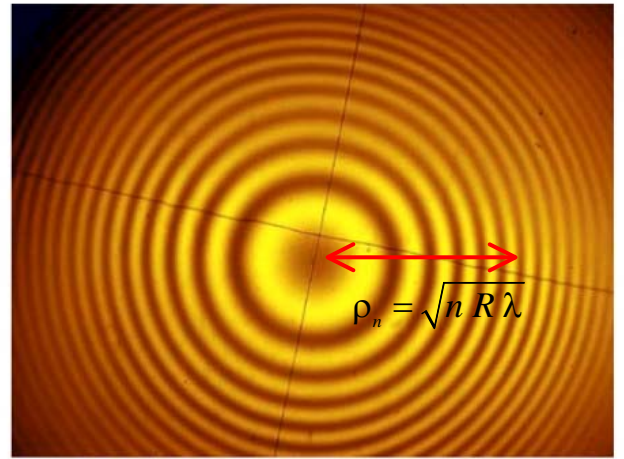
$$\text{On trouve } \delta(\rho) = \frac{\rho^2}{R} + \frac{\lambda}{2}.$$

La **frange centrale** correspond à $\rho = 0$.

L'ordre de cette frange est donc

$$p_0 = \frac{1}{2}. \text{ Cette frange est sombre.}$$

Le rayon de l'anneau sombre de rang n est $\rho_n = \sqrt{n R \lambda}$



ε) lame d'air

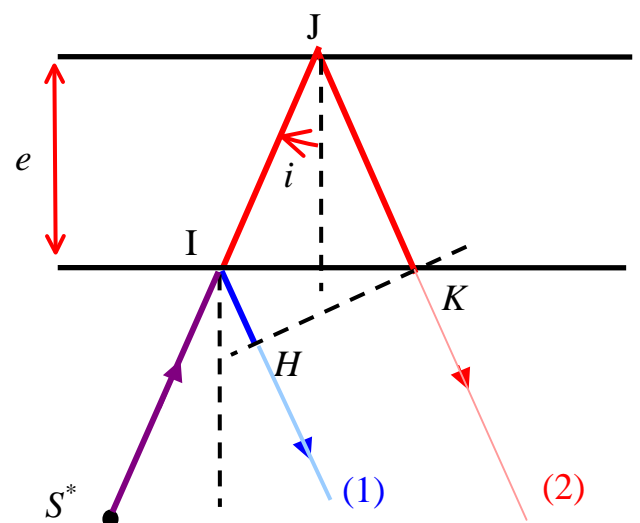
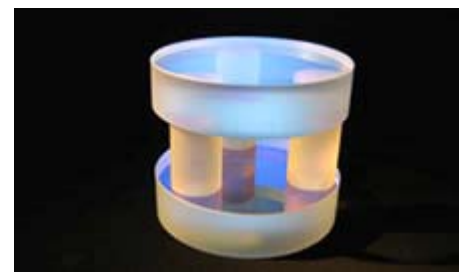
Deux plaques minces de verre (L_1) et (L_2), semi-réfléchissantes et parallèles sont distantes de e .

Chaque lame recevant une onde incidente d'amplitude ψ_0 donne naissance à une onde transmise d'amplitude $t \psi_0$ et à une onde réfléchie d'amplitude $r \psi_0$ (les coefficients r et t sont caractéristiques de la lame).

Chaque lame donne naissance à une infinité de rayons lumineux réfléchis du côté de la source S mais on considère ici que leur amplitude décroît suffisamment pour que l'on puisse se limiter aux deux premiers rayons.

Le premier rayon se réfléchit sur L_1 en semblant provenir de S_1 , image de S par la première lame; le deuxième rayon se réfléchit sur L_2 en semblant provenir de S_2 , image de S par la deuxième lame.

$S \bullet$



Conclusion: Tout se passe comme si les ondes qui interfèrent en M étaient émises par les points sources S_1 et S_2 images de S par le dispositif. Elles sont synchrones et cohérentes.

L'incidence est en générale faible si bien que les deux source S_1 et S_2 sont dans ce cas le long de la direction moyenne de propagation : les franges sont circulaires.

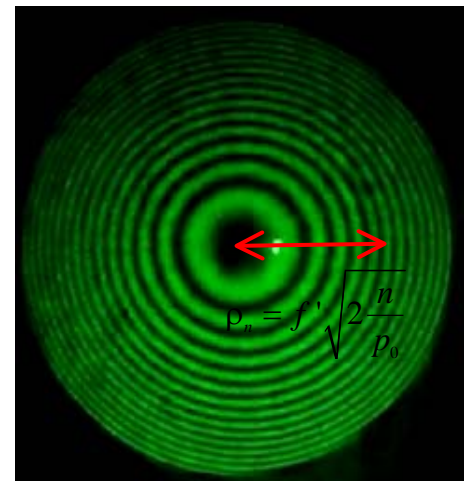
On a

$$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = (SJK) - (SIH) .$$

d'où finalement

$$\delta(M) = 2e \cos(i) \text{ car } i \in [0, \pi/2] .$$

Les lieux d'égal éclairement seront tels que $\delta(M) = C$ c'est-à-dire tels que $i = \text{constante}$.



Conclusion: Dans le réglage en lame d'air d'un interféromètre, on appelle **franges d'égal inclinaison** les franges obtenues à l'infini.

La **frange centrale** correspond à $i = 0$.

L'ordre de cette frange est donc $p_0 = 2e/\lambda_0$ qui peut être ni entier ni demi entier.

Conclusion: Dans le réglage en lame d'air, la frange centrale est en général **quelconque** (pas forcément brillante ou sombre). Ce n'est **jamais** la frange d'ordre 0.

Les autres franges correspondent à des ordres inférieurs à p_0 .

4) Interférences en lumière blanche

a) description des franges

La lumière blanche est la superposition d'onde de fréquences différentes recouvrant tout le spectre visible.

En procédant comme ci-dessus, on prévoit que l'éclairement total sera la superposition des éclairissements dus à chaque longueur d'onde.

On peut faire le calcul complet si l'on connaît la répartition spectrale de la source.

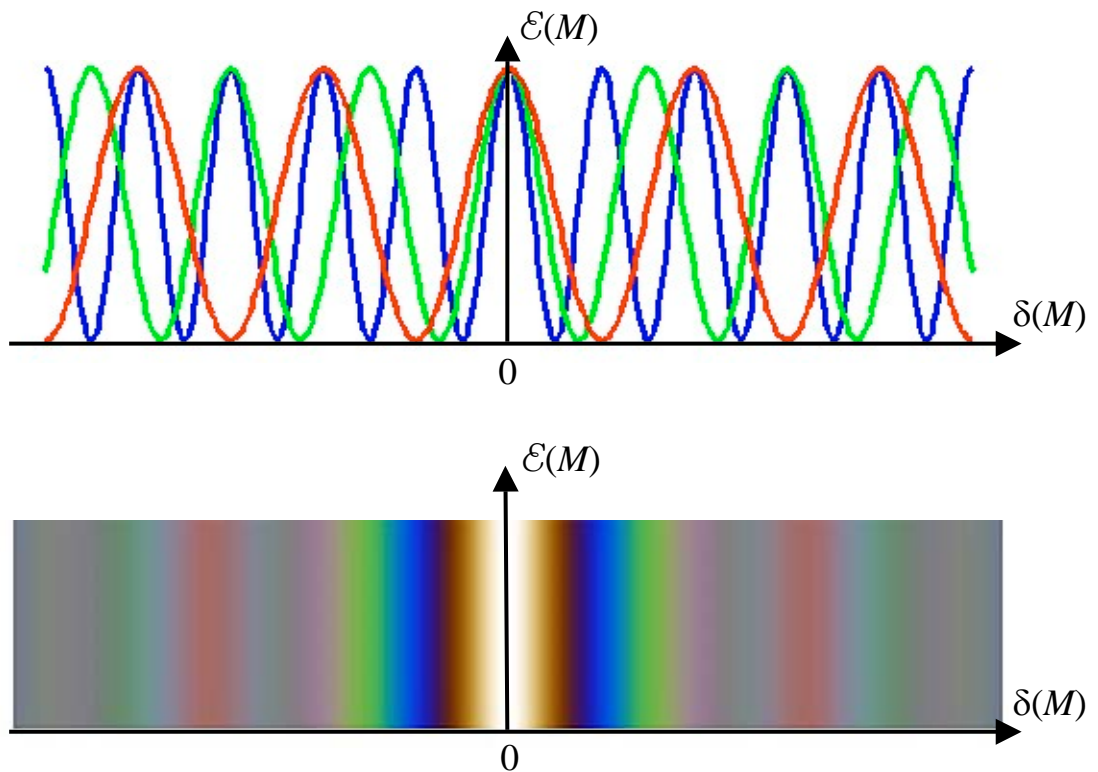
On peut aussi prévoir qualitativement quelques résultats.

Pour chaque longueur d'onde, l'éclairement sur l'écran est du type

$$\mathcal{E}_\lambda(M) = 2\mathcal{E}_{0\lambda} \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda} \right) \right) .$$

Par exemple, pour trois longueur d'onde suivantes :

$\lambda = 470 \text{ nm}$ (bleu); $\lambda = 510 \text{ nm}$ (vert); $\lambda = 620 \text{ nm}$ (rouge),
on a les courbes suivantes :



Pour $\delta = 0$ et son voisinage immédiat, les éclaircissements sont maximums pour les trois longueurs d'onde; la couleur résultante sera donc blanche.

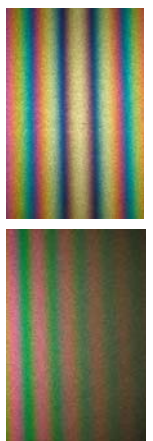
Conclusion: Dans une figure d'interférence en lumière blanche, la frange d'ordre zéro est blanche. C'est la seule.

Les valeurs de δ correspondant au premier minimum sont voisines pour les trois longueurs d'onde ($\delta \approx 300 \text{ nm}$). L'éclaircissement total est donc faible: on a une frange noire (de part et d'autre de la frange centrale) mais elle est irisée: rouge vers le centre, bleue vers l'extérieur.

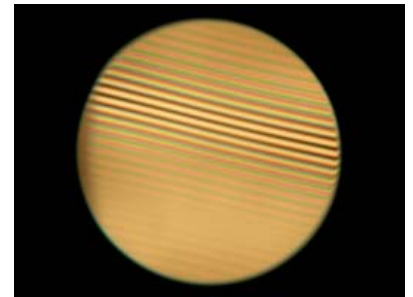
On retrouve ensuite un maximum pour toutes les longueurs d'onde soit une nouvelle frange brillante blanche mais étalée et irisée (bleue vers le centre, rouge à l'extérieur).

Pour $\delta > 1000 \text{ nm}$, il existe toujours une radiation dont l'éclaircissement sera proche du maximum et d'autres qui seront proches de leur minimum; l'éclaircissement total est à peu près uniforme mais on distingue des franges colorées.

Pour $\delta > 3000 \text{ nm}$ et pour une source émettant toutes les longueurs d'onde, on peut calculer, pour chaque valeur de δ , plusieurs valeurs de λ à leur maximum et plusieurs autres à leur minimum.



La lumière résultante apparaît comme blanche. Comme il manque certaines longueurs d'onde pour reconstituer le « vrai » blanc, cette couleur est appelée **blanc d'ordre supérieur**.



b) spectre canelé

On peut faire l'analyse spectrale de la lumière correspond à une valeur particulière δ_0 de δ dans le blanc d'ordre supérieur (on utilise un prisme ou un réseau).

Il apparaît dans le spectre continu attendu pour la lumière blanche des raies noires correspondant aux longueurs d'onde éteintes pour cette valeur δ_0 . On les appellent des cannelures.

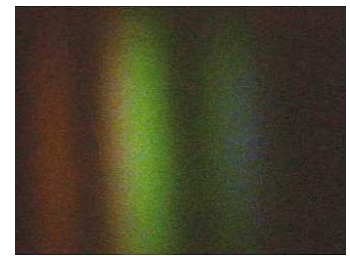
Pour déterminer le nombre de cannelures visibles, il suffit de déterminer les valeurs de λ

du spectre visible, c'est-à-dire comprise entre 400 nm et 800 nm, telles que l'on peut trouver un entier n vérifiant

$$\delta_0 = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda_n.$$

Si x_0 est la position de la fente du spectromètre sur l'écran d'observation des franges, la

relation équivalente est $x_0 = \left(n + \frac{1}{2} \right) i_\lambda$.



près de la frange centrale d'ordre zéro



dans la zone colorée



dans le blanc d'ordre supérieur